数理解析研究所講究録 1228 巻 2001 年 76-80

頂点作用素代数 V_L^+ の有理性について

大阪大学理学部　安部 利之 (Toshiyuki Abe)

Department of Mathematics, GraduateSchool of Science, Osaka University

1 序

階数 1 の偶格子 $L=\mathbb{Z}\alpha$ に付随して得られる頂点作用素代数 V_L は, L の -1-isometry から誘導される位数 2 の自己準同型写像をもつ. この自己準同型写像による V_L^+ の固定点全体 V_L^+ は V_L の部分頂点作用素代数の構造を持つ. 格子頂点作用素代数 V_L は有理的であることが知られているが, その部分頂点作用素代数 V_L^+ についても α の square length が "$2\times$(素数)" の時には有理的となることを証明したので, そのことについて報告する.

2 定義

$(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ (以下単に V と書くこともある) を頂点作用素代数とする. ここで Y は V から $\mathrm{End}\,V[[z,z^{-1}]]$ への線形写像で, 任意の $a\in V$ に対し, その Y による像を $Y(a,z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_nz^{-n-1}$, $a_n\in\mathrm{End}\,V$ とあらわすことにする. 特に $L_n=\omega_{n+1}$ $(n\in\mathbb{Z})$ とおけば, $\{L_n\}$ は V 上に Virasoro 代数の表現を与え, V は 固有値が整数の L_0 に関する固有空間の直和に分解している;

$$V=\oplus_{n\in\mathbf{Z}}V_n,\quad V_n=\{a\in V|L_0a=na\}.$$

この V_n に属する元 a をウェイト n の斉次元といい, $n=\mathrm{wt}(a)$ と書くことにする.
次に加群の定義について述べる.

定義 2.1. $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ を頂点作用素代数とする. admissible V-加群 とは, 非負整数全体の集合 $\mathbb{N}$ で次数付けされたベクトル空間 $M=\oplus_{n\in\mathbf{N}}M_n$ と線形写像

$$\begin{aligned} Y_M:V &\to (\mathrm{End}\,M)[[z,z^{-1}]],\\ a &\mapsto Y_M(a,z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a(n)z^{-n-1},\ (a(n)\in\mathrm{End}\,M)\end{aligned}$$

の組 (M,Y_M) で任意の $a,b\in V$ 及び $u\in M$ に対し次を満たすものである:
(1)

$$Y_M(a,z)v\in M((z)),\ Y_M(\mathbf{1},z)=\mathrm{id}_M,$$

(2) (Jacobi 恒等式).

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y_M(a,z_1)Y_M(b,z_2)-z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)Y_M(b,z_2)Y_M(a,z_1)$$
$$=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)Y_M(Y(a,z_0)b,z_2), \tag{2.1}$$

(3) 任意の斉次元 $a \in V$ 及び $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$a(n)M_m \subset M_{\mathrm{wt}(a)+m-n-1}.$$

admissible V-加群 M に対し，その部分加群 N は V の作用で不変な部分空間で M の次数付けによって $\mathbb{N}$ の次数付けを持つものとして定義される．また admissible V-加群は，非自明な部分加群をもたない時，**既約**であるといい，既約な部分加群の直和で表されるとき，**完全可約**であるという．

定義 2.2. 頂点作用素代数 V は，任意の admissible V-加群が完全加約となる時，**有理的**であるという．

頂点作用素代数 V が有理的ならば，その既約な admissible V-加群は同型を除いて有限個しかないことが知られている．

命題 2.3. V を頂点作用素代数とし，$M = \oplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$ を既約な admissible V-加群で，$M_0 \neq 0$ とする．この時一意的に $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して，各 M_n は L_0 の固有値 $\lambda + n$ の固有空間となる．ここで，$Y_M(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ とおいた．

この既約 admissible V-加群 M に対して一意的に決まる複素定数 λ を M の最低ウェイトと呼ぶことにする．

$$\mathcal{P}(V) = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ はある既約 admissible V-加群の最低ウェイト } \}$$

とおく．V が有理的ならば，$\mathcal{P}(V)$ は有限集合である．

3　頂点作用素代数 V_L^+ とその既約 admissible 加群

ここでは，階数 1 の偶格子 L に付随してえられる頂点作用素代数 V_L^+ とその既約 admissible 加群の構成および分類について簡単に述べる．詳しくは，構成については [FLM] を，分類については [DN] を参照．

$L = \mathbb{Z}\alpha$ を階数 1 の正定値偶格子とし，$\langle \alpha, \alpha \rangle = 2k, (k \in \mathbb{Z}_{>0})$ とする．$\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ とし，$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ を交換関係が，

$$[X \otimes t^m, X' \otimes t^n] = m\, \delta_{m+n,0} \, \langle X, X' \rangle \, K, [K, \hat{\mathfrak{h}}] = 0$$

$(X, X' \in \mathfrak{h},\ m, n \in \mathbb{Z})$ で定義される Lie 代数とする．この時，$\hat{\mathfrak{h}}$ は可換な部分 Lie 代数 $\hat{\mathfrak{h}}^- = \mathfrak{h} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ を持つ．また L° を L の双対格子とすると，L° は $L^\circ = \cup_{i=0}^{2k-1} (\lambda_r + L)$ と coset 分解される．ここで，$\lambda_r = r\,\alpha/2k$ である．今 $\mathbb{C}[L^\circ] = \bigoplus_{\beta\in L^\circ} \mathbb{C}\, e_\beta$ を L° の群環とし，任意の L° の部分集合 M に対し

$$V_M = \bigoplus_{\beta\in M} S(\hat{\mathfrak{h}}^-) \otimes_{\mathbb{C}} e_\beta$$

とおく．この時，V_L は頂点作用素代数の構造を持ち，任意の $0 \leq r \leq 2k-1$ に対し V_{λ_r+L} は互いに非同値な既約な admissible V_L-加群となる．

格子 L の -1-isometry $L \to L, \beta \mapsto -\beta$ から自然に誘導される対称代数 $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ の位数 2 の自己同型写像を θ とかく．更に V_{L° の線形自己同型写像を $u \otimes e_\beta \mapsto \theta(u) \otimes e_{-\beta}$, $(u \in$

$S(\hat{\mathfrak{h}}^-), \beta \in L^\circ$) で定義し，それを再び θ と書くことにする．任意の V_{L° の θ-不変な部分空間 W に対し，θ の ± 1-固有空間をそれぞれ $W^\pm$ とあらわす．この時，V_L^+ は V_L の部分頂点作用素代数となり，$V_L^\pm$, $V_{\alpha/2+L}^\pm$ 及び V_{λ_r+L}, $(1 \le r \le k-1)$ は既約 admissible V_L^+-加群となる．

頂点作用素代数 V_L^+ は V_L の θ の固定点をとって構成されているので，θ-twisted V_L-加群から新しい既約 V_L^+-加群が現れる．次にその構成について説明する．$\hat{\mathfrak{h}}[-1] = \mathfrak{h} \otimes t^{1/2}\mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ を交換関係が

$$[X \otimes t^m, X' \otimes t^n] = m\,\delta_{m+n,0}\,\langle X, X'\rangle\, K, \quad [K, \hat{\mathfrak{h}}[-1]] = 0$$

$(X, X' \in \mathfrak{h},\ m, n \in 1/2 + \mathbb{Z})$ で定義される Lie 代数とする．この時，$\hat{\mathfrak{h}}[-1]^- = \mathfrak{h} \otimes t^{-1/2}\mathbb{C}[t^{-1}]$ は $\hat{\mathfrak{h}}[-1]$ の可換な部分 Lie 代数となる．その対称代数 $S(\hat{\mathfrak{h}}[-1]^-)$ は L の -1-isometry から自然に誘導される自己同型写像 θ をもつ．この自己同型写像の ± 1-固有空間を $S(\hat{\mathfrak{h}}[-1]^-)^\pm$ とあらわすことにする．一方，群環 $\mathbb{C}[L]$ は，生成元 e_α がそれぞれ $1, -1$ と作用する 1 次元既約加群 T_1, T_2 をもつ．これらを用いて，$V_L^{T_i,\pm} = S(\hat{\mathfrak{h}}[-1]^-)^\pm \otimes T_i$, $(i = 1, 2)$ とおけば，この $V_L^{T_i,\pm}$, $(i = 1, 2)$ が既約な admissible V_L^+-加群の構造を持つ．

既約な admissible V_L^+-加群は上で構成されたものに限ることが Dong と永友氏によって証明された．

定理 3.1. ([DN]) 任意の既約な admissible V_L^+-加群は

$$\{V_L^\pm,\ V_{\alpha/2+L}^\pm,\ V_{r\alpha/2k+L}\ V_L^{T_i,\pm},\ | \, i = 1,\, 2,\ 1 \le r \le k-1\}$$

のいずれかに同型である．

各既約 admissible V_L^+-加群の構成から，最低ウェイトの集合 $\mathcal{P}(V_L^+)$ は

$$\mathcal{P}(V_L^+) = \{\,0,\ 1,\ r^2/4k,\ 1/16,\ 9/16\,|\,1 \le r \le k\,\} \tag{3.1}$$

で与えられることがわかる．

4 主結果

ここでは，主結果とその証明の方法について説明する．詳しくは [A] を参照．

定理 4.1. (主結果) $L = \mathbb{Z}\alpha$ を階数 1 の正定値偶格子で，$\langle \alpha, \alpha \rangle = 2k$, $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ とする．この時 k が素数ならば，頂点作用素代数 V_L^+ は有理的である．

証明について簡単に説明する．まず最初に次の命題について述べる．

命題 4.2. (1) M を admissible V_L^+-加群とする．任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$M^{(\lambda)}$ を固有値が λ の L_0 に関する広義固有空間とする．この時，ある最低ウェイト $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathcal{P}(V_L^+)$ が存在して，M は

$$M = \bigoplus_{i=1}^{s} \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(\lambda_i+n)} \right)$$

の形に広義固有空間分解される．更に，各 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(\lambda_i+n)}$ は M の admissible V_L^+-部分加群である．

(2) λ を最低ウェイトとする．この時 $(\lambda + \mathbb{Z}_{>0}) \cap \mathcal{P}(V_L^+) = \emptyset$ ならば，$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(\lambda+n)}$ の形の admissible V_L^+-加群は完全可約である．

この命題の証明には，[Z] で導入された Zhu 代数の概念を用いる．Zhu 代数 $A(V)$ は頂点作用素代数 V に付随して構成され，たとえば，$A(V)$ の既約加群と V の既約な admissible 加群の間には一対一対応が存在するなど，その表現論は頂点作用素代数の表現論と密接に関係している．この Zhu 代数の概念を用いて，Zhu 代数が半単純であるような頂点作用素代数 V にたいし，上の命題のにおいて V_L^+ を V に置き換えたものが成立することが証明できる．更に頂点作用素代数 V_L^+ に付随する Zhu 代数 $A(V_L^+)$ は半単純であることが [DN] で示されている．したがって命題が導かれる．

命題 4.2 は Zhu 代数 $A(V_L^+)$ が半単純であることのみを用いているので，任意の正数 k に対し成立する．しかし (3.1) より，0 は常に命題 4.2 の (2) の仮定を満たしていないことがわかる．よって 命題 4.2 からは V_L^+ の完全可約性は従わない．今 k は素数と仮定する．この時，次の補題が成立する．

補題 4.3. k は素数とする．この時，最低ウェイト $0, 1, 1/16, 9/16$ 及び $r^2/4k$, $(1 \leq r \leq k)$ はすべて異なる．更に，任意の $\lambda \in \mathcal{P}(V_L^+) \setminus \{0\}$ は $(\lambda + \mathbb{Z}_{>0}) \cap \mathcal{P}(V_L^+) = \emptyset$ を満たす．

証明 任意の $1 \leq r \leq k$ に対し，$r^2/4k, r^2/4k - 1/16, r^2/4k - 9/16 \notin \mathbb{Z}$ であること及び，任意の $1 \leq r \neq s \leq k$ に対し，$(r^2 - s^2)/4k \notin \mathbb{Z}$ であることを示せばよい．例えば，$r \neq s$ に対し $(r^2 - s^2)/4k$ が整数でないことは次のように示される．今 $(r^2 - s^2)/4k$ がある $1 \leq r < s \leq k$ に対し整数になったと仮定する．この時 k が素数で $1 \leq s - r \leq k - 1$ であるので，$k|(r+s)$ となることがわかる．さらに，$3 \leq r + s \leq 2k - 1$ より，$r + s = k$ で $k \geq 3$ となることがわかる．したがって，$(r^2 - s^2)/4k = (2s - k)/4$ が成り立ち，これは k が奇素数であることに反する．その他の場合も同様に示すことができる． □

注意 4.4. k が素数でなければ，ある正数 $0 \leq r < s \leq k$ で $r^2/4k - s^2/4k \in \mathbb{Z}$ となるものが存在する．実際に，k が素数でなければ，k は正数 p, q $(q \leq p)$ および n を用いて $k = pqn$ とあらわすことができる．この時，$0 \leq np - nq < np + nq \leq npq = k$ が成立し，$(np + nq)^2/4k - (np - nq)^2/4k = n \in \mathbb{Z}$ となることがわかる．

補題 4.3 と命題 4.2 (2) より，k が素数の時，次の命題を得る．

命題 4.5. k が素数ならば，任意の $\lambda \in \mathcal{P}(V_L^+) \setminus \{0\}$ に対し，$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(\lambda+n)}$ の形の admissible V_L^+-加群は完全可約である．

したがって $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(n)}$ の形の admissible V_L^+-加群が完全可約であることを示せば，定理 4.1 の証明が完了する．以下，次の命題の証明について説明する．

命題 4.6. k が素数ならば，$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(n)}$ の形の admissible V_L^+-加群は完全可約である．

まず任意に零でない $u \in M$ に対し，u で生成される M の admissible V_L^+-部分加群を $\langle u \rangle$ とかくことにする．この時 $u \in M^0$ ならば，$\langle u \rangle^{(1)} = \mathbb{C}L_{-1}u$ となる．今 $L_{-1}u \neq 0$ と仮定する．この時，$\langle L_{-1}u \rangle \cong V_L^-$ 及び $\langle u \rangle / \langle L_{-1}u \rangle \cong V_L^+$ となることがわかる．よって，admissible V_L^+-加群の完全系列

$$0 \to V_L^- \to N \to V_L^+ \to 0$$

が分裂することを示すことによって，admissible 加群としての同型 $\langle u \rangle \cong V_L^+ \oplus V_L^-$ が得られる．特に $L_{-1}u = 0$ である．これは，$L_{-1}u \neq 0$ に矛盾し，したがって $\langle u \rangle \cong V_L^+$

であることがわかる．よって $M^{(0)}$ で生成される M の admissible V_L^+-部分加群 U は V_L^+ の直和に同型である．

次に $v \in M^{(1)}$ をとり，$L_1 v \neq 0$ と仮定する．この時，$\langle L_1 v \rangle \cong V_L^+$ 及び $\langle v \rangle / \langle L_1 v \rangle \cong V_L^-$ となることがわかる．よって，admissible V_L^+-加群の完全系列

$$0 \to V_L^+ \to N \to V_L^- \to 0$$

が分裂することを示すことによって，admissible 加群としての同型 $\langle v \rangle \cong V_L^+ \oplus V_L^-$ が得られる．特に $V_L^+(1) = 0$ であることに注意すると，$L_1 u = 0$ であることがわかる．これは，$L_1 v \neq 0$ に矛盾し，したがって $\langle u \rangle \cong V_L^+$ であることが導かれる．よって $M^{(1)}$ で生成される M の admissible V_L^+-部分加群 W は V_L^- の直和に同型である．

M の admissible V_L^+-部分加群 $U + W$ は $M^{(0)} \oplus M^{(1)}$ を含んでいるので，商加群 $M/(U+W)$ は $M/(U+W) = \bigoplus_{n=2}^{\infty} (M/(U+W))^{(n)}$ と分解している．よって命題 4.2 と補題 4.3 より，$M/(U+W) = 0$，すなわち $M = U + W$ となることがわかる．従って各 U, W は完全可約であったので，M の完全可約性が得られる．

参考文献

[A] T. Abe, The charge conjugation orbifold $V_{\mathbb{Z}\alpha}^+$ is rational when $\langle \alpha, \alpha \rangle / 2$ is prime, preprint.

[DN] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of Vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L, *Commun. Math. Phys.* **202** (1999), 169-195.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, "Vertex Operator Algebras and the Monster", Pure and Appl. Math., Vol. 134, Academic Press, Boston, 1988.

[Z] Y.-C. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237-302.